CHAPITRE 1 : Equations – Inéquations – Systèmes

Rappel : Ensemble de nombre

IN : ensemble des entiers naturels = {0 ; 1 ; 2 ; …}
Z : ensemble des entiers relatifs = {…. ; -2 ; -1 ; 0 ; 1 ; 2 ; …}
D : ensemble des nombres décimaux = {x ; (il existe) a є Z & (il existe) b є Z x=a.10^b}
Q : ensemble des nombres rationnels = {a/b où a є Z et b є Z^+ }
IR : ensemble des rationnels & des irrationnels

Remarque

1/3 €pas D ; 1/3 є Q ; π €pas Q … mais π, e, ln3, √2… є R
N c Z c D c Q c R
R+ = [0 ; +∞ [
R =] -∞ ; 0]
R+* =]0 ; + ∞ [

I. Equations du 1er degré à 1 inconnue
II. Equations du 2nd degré

Une équation polynomiale du 2nd degré est une équation qui peut se mettre sous la forme :
$ax^2 + bx + c = 0$ où a € R ; b € R ; c € R

I. Equations

Théorème de résolution

Discriminant : $\boxed{\Delta = b^2 - 4ac}$ -> 3 cas

1. si *Δ > 0* alors deux solutions (2 racines)

   $x1 = (-b + \sqrt{\Delta}) / 2a$
   $x2 = (-b - \sqrt{\Delta}) / 2a$

2. si *Δ = 0* alors une solution (racine double)

   $x0 = (-b) / 2a$

3. si *Δ < 0* alors Pas de solution dans R

Rappel : Identités Remarquables

$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$

Théorème du discriminant réduit

Quand $\Delta > 0$ on a

La **somme des racines** : $\mathbf{x1 + x2 = -b / a}$
Le **produit des racines** : $\mathbf{x1 * x2 = c / a}$

Si **b pair** alors il existe **b'** tel que $\boxed{\mathbf{b = 2\ b'}}$

On a donc $\Delta = b^2 - 4\ ac$
$= (2b')^2 - 4\ ac$
$= 4\ b'^2 - 4\ ac$
$= 4\ (b'^2 - 4\ ac)$

Discriminant réduit : $\boxed{\Delta' = (b')^2 - ac}$ -> 3 cas

1. $\Delta' > 0$ alors $\mathbf{x1 = (-b' + \sqrt{\Delta}) / a}$
   $\mathbf{x2 = (-b' - \sqrt{\Delta}) / a}$

2. $\Delta' = 0$ alors $\mathbf{x0 = -b' / a}$
3. $\Delta' < 0$ alors pas de solution dans R

Théorème de factorisation

On calcule Δ -> 3 cas

1. $\Delta > 0$ alors $ax^2 + bx + c = \mathbf{a\ (x - x1)\ (x - x2)}$
2. $\Delta = 0$ alors $ax^2 + bx + c = \mathbf{a\ (x - x0)}$
3. $\Delta < 0$ alors pas factorisable dans R

Applications (+ modèle de rédaction)

1. Donner la forme factorisée de $-4x^2 + 3x + 1$

$\Delta = b^2 - 4\ ac = 3^2 - 4\ (-4)\ 1 = 25 > 0$ -> 2 racines

- Calcul des racines
  $x1 = (-b + \sqrt{\Delta}) / 2a = (-3 + 5) / -8$
  $x2 = (-b - \sqrt{\Delta}$

- Forme factorisée
  On a $-4x^2 + 3x + 1 = -4\ [x - (-¼)]\ (x - 1)$

donc $-4x^2 + 3x + 1 = -4(x + \frac{1}{4})(x - 1)$

- Etude du signe

X	**-∞**		**-¼**		**1**		**+∞**
x + ¼		-	0	+		+	
x – 1		-		-	0	+	
-4		-		-		-	
- 4x² + 3x + 1		-	0	+	0	-	

- $4x^2 + 3x + 1 > 0$ pour x €]- ¼ ; 1 [
- $4x^2 + 3x + 1 < 0$ pour x €] -∞ ; -¼ [U] 1 ; +∞ [
- $4x^2 + 3x + 1 = 0$ pour x € { -¼ ; 1 }

2. Déterminer les nombres réels a & c tels que $ax^2 - 2x + c = 0$ avec S = { 2 ; -1 } De 3 manières différentes.

Méthode 1

$$\begin{cases} a + 2 + c = 0 \\ 4a - 4 + c = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} a + 2 + c = 0 \\ -4a + 4 - c = 0 \end{cases}$$

$-3a + 6 = 0$
$a = 2$
$c = -2 - 2 = -4$
$2x^2 - 2x - 4 = 0$

Méthode 2

$x1 + x2 = -b / 2a$

Or $-b = 2$
$2 - 1 = 2 / a$
$a = 2$

$x1.x2 = c / a$
$-2 = c / 2$
$c = -4$

Méthode 3

$a(x - 2)(x + 1) = 0$
$(ax - 2a)(x + 1) = 0$
$ax^2 + ax - 2ax - 2a = 0$
$ax^2 - ax - 2a = 0 = ax^2 - 2x + c$

Par identification, on obtient le système suivant :

$$\begin{cases} -2 = -a \\ \end{cases} \qquad \begin{cases} a = 2 \\ \end{cases}$$

c = - 2a c = -4

II. Inéquations

Rappel

<u>Intervalles de R</u>
$2 \leq x < 7.1$ peut s'écrire x € [2 ; 7.1[

<u>Union d'intervalles</u>
]–4 ; 17[U]7 ; 19] =]-4 ; 19[

<u>Intersection d'intervalles</u>
]7 : 17[

A. Inéquations du 1^er^ degré

Même méthode que pour équation sauf que quand on divise un côté ou un autre par un nombre négatif, -> inversion du signe

<u>Ex :</u>
$-7x \leq 7$
$x \geq -1$ -> [-1 ; +∞ [

<u>Résoudre :</u>
(2x – 1) / x < 0
Domaine d'existence : D = R*

x	**-∞**			**0**			½		**+∞**
2x – 1		-				-	0	+	
x		-		0		+		+	
(2x – 1) / x		+				-	0	+	

Donc S =] 0 ; ½ [

<u>Cas général</u>

Signe de ax + b avec a € R*
b € R

x	**-∞**	**- b/a**	**+∞**
Signe de ax +b	Signe de -a	0	Signe de a

B. Inéquations du 2^nd^ degré

<u>Théorème</u>
Pour trouver le signe de $ax^2 + bx + c$ en fonction de x, on distingue 3 cas (où $x1<x2$) :

1. si Δ **> 0** alors on a :

		x1		**x2**	
$ax^2 + bx + c$	Signe de a	0	Signe de -a	0	Signe de a

$ax^2 + bx + c$ est du signe de a à l'extérieur des racines

2. si Δ **= 0** alors on a :

		x0	
$ax^2 + bx + c$	Signe de a	0	Signe de a

3. si Δ **< 0** alors on a :

x	**-∞**		**+∞**
$ax^2 + bx + c$		Signe de a	

III. Système d'équations

A. A deux inconnus

1. **Par substitution**
   On isole l'une des 2 variables dans l'une des deux équations puis on substitue cette expression dans l'autre équation. On obtient une équation à une inconnue qu'on résout.

   Ex :

   $$\begin{cases} 2x + y = 2 \\ x + 3y = 1 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} y = 2 - 2x \\ x + 3(2 - 2x) = 1 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} y = 2 - 2x \\ x + 6 - 6x = 1 \end{cases}$$

   $$\leftrightarrow \begin{cases} y = 2 - 2x \\ x = 1 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = 1 \end{cases}$$

   Le système admet pour unique solution dans R^2 le couple (1 ; 0)

   $\boxed{S = \{(1 ; 0)\}}$

2. **Par combinaison linéaire**
   On ajoute ou on soustrait les lignes entre elles, lignes qu'on aura parfois à multiplier par des constantes réelles avec pour objectif de chasser une des deux variables. On obtient une équation à une inconnue qu'on résout.

   Ex :

   $$\begin{cases} 2x + y = 2 & L1 \\ x + 3y = 1 & L2 \end{cases}$$

   $$\leftrightarrow \quad | \; x + 3y = 1 \qquad L1 \leftarrow L2$$

| -5y = 0 L1 <– 2 L2

↔ | y = 0
| x = 1

$\boxed{S = \{(1 ; 0)\}}$

3. Résolution graphique

On isole y dans les 2 équations. Soit D1 la droite correspondant à la 1ère équation. Soit D2 celle correspondant à la deuxième. On trace D1 et D2.
Quand D1 et D2 sont sécantes, alors le système admet une solution unique. La solution est le couple de coordonnées du point d'intersection.

-> Méthode à éviter car peu précise.

↔ | y = 2 – 2x
| y = 1/3 – 1/3

Soit D1 la droite d'équation y = 2 – 2x
Soit D2 la droite d'équation y = 1/3 – 1/3 x = 1/3 (1 – x)

Cherchons 2 points de D1 :

X	0	1
Y	2	0

A (0 ; 2)
B (1 ; 0)

Cherchons 2 points de D2 :

X	4	-2
Y	-1	1

A'(4 ; 1)
B'(-2 ; 1)

(Tracer graphe et placer I le point d'intersection des deux droites)

La solution du problème est le couple de coordonnées du point d'intersection I → S = {(1 ; 0)}

B. A 3 inconnues et +

Cas particulier : **Système triangulaire**

Ex :

↔ | x + 2y + 3z = 2 ↔ | z = 4
| y + 4z = 8 | y = -8
| 3z = 12 | x = 6

$\boxed{S = \{(6\ ;\ -8\ ;\ 4)\}}$

<u>Cas général :</u> **<u>Méthode du point de Gauss</u>**

Les 3 équations doivent toujours apparaître.

$$\textbf{S1}\quad \left|\begin{array}{l} x + 3y + 2z = 2 \\ x + 4y + 3z = 3 \\ 2x + 7y + 7z = 8 \end{array}\right. \begin{array}{l} L1 \\ L2 \\ L3 \end{array} \quad \leftrightarrow \quad \left|\begin{array}{lll} x + & 3y + & 2z = 2 \\ & -y & -z = -1 \\ & & -y = 2 \end{array}\right. \quad \begin{array}{l} L1 \leftarrow L1 \\ L2 \leftarrow L1 - L2 \\ L3 \leftarrow L3 - 2\,L2 \end{array}$$

$$\leftrightarrow \quad \left|\begin{array}{l} y = -2 \\ z = 3 \\ x = 2 \end{array}\right.$$

$\boxed{S = \{(2\ ;\ -2\ ;\ 3)\}}$

$$\textbf{S2}\quad \left|\begin{array}{l} 4x - y - z = 2 \\ 5x + y + z = 1 \\ -2x + 3y - 3z = 1 \end{array}\right. \begin{array}{l} L1 \\ L2 \\ L3 \end{array} \quad \leftrightarrow \quad \left|\begin{array}{lll} 4x & -y & -z = 2 \\ & & 9x = 1 \\ & & 13x = 4 \end{array}\right. \quad \begin{array}{l} L1 \leftarrow L1 \\ L2 \leftarrow L1 + L2 \\ L3 \leftarrow L3 + 3\,L2 \end{array}$$

$$\leftrightarrow \quad \left|\begin{array}{l} 4x - y - z = 2 \\ x = 1/9 \\ x = 4/13 \end{array}\right. \quad \begin{array}{l} L1 \leftarrow L1 \\ L2 \leftarrow L2 \\ L3 \leftarrow L3 \end{array}$$

Or $1/9 \neq 4/13$

$\boxed{S = \emptyset}$

$$\textbf{S3}\quad \left|\begin{array}{l} x + y + z = 1 \\ x + 2y - 2z = 0 \\ 2x + 3y - z = 1 \end{array}\right. \begin{array}{l} L1 \\ L2 \\ L3 \end{array} \quad \leftrightarrow \quad \left|\begin{array}{lll} x & +y & +z = 1 \\ & y & -3z = -1 \\ & y & -3z = -1 \end{array}\right. \quad \begin{array}{l} L1 \leftarrow L1 \\ L2 \leftarrow L2 - L1 \\ L3 \leftarrow L3 - 2\,L1 \end{array}$$

$$\leftrightarrow \quad \left|\begin{array}{l} x + y + z = 1 \\ \quad y - 3z = -1 \\ \qquad 0 = 0 \end{array}\right. \quad \begin{array}{l} L1 \leftarrow L1 \\ L2 \leftarrow L2 \\ L3 \leftarrow L2 - L3 \end{array}$$

Toujours vrai -> infinité de triplets solutions mais pas n'importe lesquels.

On fixe z puis on note x et y en fonction de z

$L2 \leftrightarrow y - 3z = -1 \qquad \leftrightarrow y = 3z - 1$

$L1 \leftrightarrow x + y + z = 1 \qquad \leftrightarrow x + (3z - 1) + z \qquad \leftrightarrow x = -4z + 2$

$\boxed{S = \{(-4z+2\ ;\ 3z - 1\ ;\ z)\}}$